4/4/19

Βασικές (Cauchy) ακολουθίες και πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός: Έστω (X,ρ) ένας μ.χ. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X λέγεται βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε: $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ για κάθε $n,m\geq n_0$

! **Σημείωση:** Η έννοια της βασικής ακολουθίας εξετάζει το πόσο κοντά είναι μεταξύ τους οι όροι μιας ακολουθίας. Αντίθετα η σύγκλιση μιας ακολουθίας εξετάζει πόσο κοντά είναι οι όροι μιας ακολουθίας από ένα όριο στο x_0

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική

Αποδ. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X και $x_0\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει: $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon/2$ για κάθε $n\geq n_0$

Για κάθε $n,m\geq n_0$ έχουμε:

$$\rho(x_n,x_m)\leq\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,x_m)=\rho(x_n,x_0)+\rho(x_m,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική

Παρατήρηση: Το αντίστροφο στην παραπάνω πρόταση δεν είναι σωστό.

Π.χ.)
Στον $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική (ως υπόχωρος του $\mathbb{R}$ με τη σχετική μετρική από τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$), θεωρούμε την ακολουθία:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν τη δούμε ως ακολουθία στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει στο e δηλ. $x_n \to e$ άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Έτσι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{Q}$ αλλά δεν είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{Q}$, διότι δεν υπάρχει $q\in\mathbb{Q}$ ώστε $x_n \to q$ (Αν υπήρχε τέτοιο q τότε έχουμε $x_n \to e$ στο $\mathbb{R}$ θα είχαμε $e = q \in \mathbb{Q}$ άτοπο)

Πρόταση: Έστω (X, ρ) μ.χ. κάθε βασική ακολουθία στο X είναι φραγμένη.

Αποδ: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της βασικής ακολ. για $\varepsilon = 1$ προκύπτει ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < 1$
Θέτουμε: $C = \max\{1, \rho(x_1, x_{n_0}), \rho(x_2, x_{n_0}), \ \ , \rho(x_{n_0-1}, x_0)\}$

Τότε $C\in\mathbb{R}$ με $C \geq 1$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι:
$\rho(x_n, x_0) \leq C$

Άρα: $\rho(x_n, x_m) \leq 2C \quad \forall n, m\in\mathbb{N}$

Άρα $\sup\{\rho(x_n, x_m) : n, m\in\mathbb{N}\} \leq 2C < +\infty$

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο X η οποία έχει μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m\geq n_1$ να ισχύει: $\rho(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$. Εφόσον $x_{k_n}\xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_2$ να ισχύει: $\rho(x_{k_n},x)<\frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0$: $k_n\geq n\geq n_0\geq n_2$ άρα: $\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2$
Εφόσον: $k_n\geq n_0\geq n_1$ και $n\geq n_0\geq n_1$ έχουμε: $\rho(x_{k_n},x_n)<\varepsilon/2$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x_n,x)\leq\rho(x_n,x_{k_n})+\rho(x_{k_n},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Επομένως $x_n\xrightarrow{\rho} x$

Ορισμός Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται **πλήρης** αν κάθε βασική ακολουθία του (X,ρ) είναι συγκλίνουσα. [δηλ. $\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολ. στο X υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n\xrightarrow{\rho} x$]

$\rightarrow$ Ένα $F\subseteq X$ λέγεται πλήρες αν ο (F,ρ_F) (όπου ρ_F: η σχετική μετρική στο F από τη ρ) είναι πλήρης. [δηλ. για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F $\exists\, x\in F$ ώστε: $x_n\xrightarrow{\rho} x$

Παραδείγματα: α) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος
[Πράγματι (όπως γνωρίζουμε από Απειρ1) κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό]

β) Ο $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι πλήρης.
(Η $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι βασική ακολ. στο $\mathbb{Q}$ η οποία δεν είναι συγκλίνουσα)

γ) Ο $\mathbb{R}^k$ με την ευκλείδεια μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος.

απόδ:
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$. Για κάθε n έστω: $x_n = (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(k))$

Ισχυρισμός: Για κάθε $i=1,\dots,k$ η ακολουθία $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική

απόδ: Παρατηρούμε ότι $\forall n,m$ ισχύει:

$$|x_n(i) - x_m(i)| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_n(j) - x_m(j)|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \rho_2(x_n, x_m)$$

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $\rho_2(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n,m \geq n_0$ άρα:
$|x_n(i) - x_m(i)| < \varepsilon$ $\forall$ $n,m \geq n_0$

Άρα $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{R}$

Εφόσον ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης για κάθε $i=1,\dots,k$ η $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Θέτουμε $x(i) = \lim_n x_n(i)$ και $x = (x(1), x(2), \dots, x(k))$

Εφόσον όπως έχουμε δει, η σύγκλιση στον $\mathbb{R}^k$

είναι κάτω συνεχή, ... συμπεραίνουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho_2} x$. Επομένως $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ είναι πλήρης

δ) Με την ίδια ακριβώς απόδειξη αποδεικνύεται ότι αν $(X_i, d_i)_{i=1}^{k}$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι τότε ο $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ με τη μετρική d που ορίζεται από τον τύπο: $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{1/2}$ είναι πλήρης $\forall\ x = (x_1, \dots, x_k)$
$y = (y_1, \dots, y_k)$

ε) Έστω $X \neq \emptyset$ και ρ η διακριτή μετρική στο X. Τότε ο (X, ρ) είναι πλήρης

Απόδ: Πράγματι έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον (X,ρ), τότε $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και άρα $x_n = x_m$ $\forall\ n, m \geq n_0$. Συνεπώς $x_n = x_0$ $\forall\ n \geq n_0$. Έτσι αφού η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή άρα συγκλίνουσα.

Ορισμός Έστω $(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα. Ο $(X, \|\ \|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα. (δηλ. κάθε βασική ακολουθία είναι συγκλίνουσα)

~~στ) Ο $\mathbb{R}$ με τη μετρική $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$~~ Βλ. πιο πίσω (*)

[Από προηγούμενο η d είναι μετρική στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα ισοδύναμη της συνήθους μετρικής] Δεν είναι πλήρης]

[και άρα η πληρότητα δεν είναι τοπολογική ιδιότητα αφού $(\mathbb{R}, \rho) \sim (\mathbb{R}, d)$ ενώ $(\mathbb{R}, \rho)$ πλήρης ενώ $(\mathbb{R}, d)$ όχι πλήρης.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Αν το F είναι πλήρες τότε το F είναι κλειστό.

Απόδειξη: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο F και $x\in X$ ώστε: $x_n \xrightarrow{\rho} x$ (και θα δείξουμε ότι $x\in F$)

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα άρα είναι βασική. Εφόσον το F είναι πλήρες υπάρχει $y\in F$ ώστε: $x_n \xrightarrow{\rho} y$.

Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} x$ προκύπτει $x=y$ άρα (εφόσον $y\in F$) συμπεραίνουμε ότι $x\in F$.

Επομένως το F είναι κλειστό.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $F\subseteq X$. Τότε το F είναι κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνο αν το F είναι πλήρες.

Απόδειξη: Αν το F είναι πλήρες τότε (από την προηγούμενη πρόταση) το F είναι κλειστό.

[Σημείωση: Για αυτή την κατεύθυνση δεν χρησιμοποιούμε καθόλου ότι (X,ρ) είναι πλήρης]

Έστω τώρα ότι το F είναι κλειστό και Θ.Δ.Ο το F είναι πλήρες. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο F. Τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο X και εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης θα υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Εφόσον το F είναι κλειστό και $x_n\in F$ $\forall n$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$ συμπεραίνουμε ότι $x\in F$.

Επομένως το F είναι πλήρες.

Παρατήρηση: Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη κενών υποσυνόλων ενός μ.χ. (X,ρ) ώστε $diam(A_n)\to 0$. Τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι είτε κενό ή μονοσύνολο. (Πράγματι αν $x,y\in\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ με $x\neq y$ τότε: $diam(A_n)\geq \rho(x,y)>0$ $\forall n$ δηλ. $diam(A)\not\to 0$ άτοπο)

Θεώρημα (Χαρακτηρισμός Cantor για των πλήρων μετρικών χώρων)
Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος Τ.Α.Ε.Ι.
i) Ο (X,ρ) είναι πλήρης
ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία μη κλειστών υποσυνόλων $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X με $diam(F_n)\to 0$ ισχύει: $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\neq\emptyset$ (και άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\{x\}$ για κάποιο $x\in X$)

Απόδειξη: i) $\Rightarrow$ ii) Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $diam(F_n)\to 0$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ επιλέγουμε τυχαίο $x_n\in F_n$. Δείχνουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.
Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $diam(F_n)\to 0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για $n\geq n_0$ $diam(F_n)<\varepsilon$.
Για κάθε $n,m\geq n_0$ $\left.\begin{array}{l}x_n\in F_n\subseteq F_{n_0}\\ x_m\in F_m\subseteq F_{n_0}\end{array}\right\}\Rightarrow \rho(x_n,x_m)\leq \underbrace{diam(F_{n_0})}_{<\varepsilon}$

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n\xrightarrow{\rho} x$. Θα δείξουμε ότι $x\in F_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Έστω $m\in\mathbb{N}$ (και θα δ.ο $x\in F_m$). Για $n\in\mathbb{N}$ $x_{n+m}\in F_{n+m}$ και $F_{n+m}\subseteq F_m$
$x_{n+m}\xrightarrow{\rho} x$ άρα: $x\in \overline{F_m}=F_m$, F_m: κλειστό

Συνεπώς $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

ii) $\Rightarrow$ i) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο X. Θέτουμε:

$$F_n = \overline{\{x_k, k \geq n\}} \quad n=1,2,\dots$$

Παρατηρούμε ότι τα F_n είναι κλειστά σύνολα, η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

(Πράγματι $\forall n \Rightarrow \{x_k, k \geq n+1\} \subseteq \{x_k, k \geq n\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{\{x_k, k\geq n+1\}} \subseteq \overline{\{x_k, k\geq n\}} \Rightarrow F_{n+1} \subseteq F_n \ \forall n$)

και $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η (x_n) είναι βασική $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n,m \geq n_0$

άρα $\operatorname{diam}\{x_k, k\geq n_0\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ άρα

$\operatorname{diam}\overline{\{x_k, k\geq n_0\}} = \operatorname{diam}\{x_k \geq n_0\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Δηλ. $\operatorname{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$. Εφόσον (F_n) φθίνουσα $\operatorname{diam}(F_n) \leq \operatorname{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ άρα $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$

Άρα από την υπόθεση $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ και εφόσον $\operatorname{diam} F_n \to 0$ υπάρχει $x \in X$ ώστε: $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$

Θα δ.ο. $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ $x_n, x \in F_n$ άρα:
$\rho(x_n, x) \leq \operatorname{diam}(F_n) \to 0$

Συνεπώς $x_n \xrightarrow{\rho} x$

(*) στ) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε $d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| =$
$= |f(x) - f(y)|$. Η d είναι μετρική στο $\mathbb{R}$ διότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ $(\subseteq \mathbb{R})$, $f(t) = \frac{t}{1+|t|}$
f: 1-1, επί του διαστήμ. $(-1,1)$
Η d είναι ισοδύναμη της συνήθους μετρικής ρ του $\mathbb{R}$ $(\rho(x,y) = |x-y|)$
Η ακολουθία $x_n = n$ είναι βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, d)$
Έστω $\varepsilon > 0$, εφόσον $\frac{n}{1+n} \xrightarrow{\rho} 1$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:
$\left| \frac{n}{1+n} - 1 \right| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_0$ άρα για $n, m \geq n_0$
$d(x_n, x_m) = d(n,m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| \leq \left| \frac{n}{1+n} - 1 \right| + \left| \frac{m}{1+m} - 1 \right| <$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Η ακολουθία αυτή όμως δεν είναι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{R}, d)$ [Πράγματι αν ήταν συγκλίνουσα δηλ. αν $\exists\, x \in \mathbb{R}$: $x_n \xrightarrow{d} x$, τότε εφόσον $d \sim \rho$ $x_n \xrightarrow{\rho} x$ δηλ. ότι η ακολ. $x_n = n$ είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, άρα φραγμένη, άτοπο]